

# Foliaciones límite

Fernando Cukierman

Universidad de Buenos Aires \*

El objetivo principal de esta charla es introducir el método de degeneración en la teoría de foliaciones singulares algebraicas.

En varias áreas de la Geometría Algebraica se utiliza una técnica clásica denominada "método de degeneración". La idea básica es que para demostrar cierto tipo de teorema referente, por ejemplo, a una curva  $X$  no-singular se considera una degeneración de  $X$  a una curva singular  $X_0$ , usualmente una unión transversal de curvas de género menor. Algunas veces resulta posible demostrar una afirmación apropiada para  $X_0$  y en segundo lugar deducir la afirmación original para  $X$ . Este segundo paso, que es el punto esencial del método, requiere un buen conocimiento de la relación que conecta los objetos de interés en las fibras general y especial en una familia.

Existen varios teoremas sobre curvas algebraicas que fueron demostrados originalmente a través de este método y para los cuales una demostración directa no se conoce o fue hallada a posteriori. Tal es el caso, por ejemplo, con la demostración de Gieseker de la inyectividad de la aplicación de Petri [HM] en la teoría de Brill-Noether. Otro ejemplo es el estudio de cuestiones de tipo Noether-Lefschetz en superficies proyectivas, vía degeneraciones [GH]. También cabe mencionar en este sentido los trabajos de Ziv Ran sobre la geometría de variedades de Severi de curvas planas y los trabajos sobre límites de estructuras de Hodge (Griffiths, Schmid, Cattani, Kaplan y otros).

En principio, el método de degeneración es especialmente útil para demostrar teoremas sobre variedades con moduli generales que no son ciertos para variedades particulares.

Un desarrollo sistemático dentro del método de degeneración es la teoría de Series Lineales Límite de Eisenbud-Harris [EH,1]. Esta técnica se aplica

---

\*fcukier@dm.uba.ar

al estudio de series lineales en curvas y sus puntos de ramificación. Con mayor detalle, si  $X$  es una curva algebraica completa no-singular y  $(V, L)$  es una serie lineal en  $X$  entonces Eisenbud-Harris describieron el tipo de objeto (serie lineal límite) que se obtiene en  $X_0$  (curva de tipo compacto) como límite de  $(V, L)$ . Resulta ser que dicho límite consiste de una serie lineal  $(V_i, L_i)$  en cada componente irreducible de  $X_0$ , sujetas a ciertas condiciones de compatibilidad de inflexión en los puntos de intersección de las componentes. Varias aplicaciones se pueden encontrar en [EH], [C], [CF], [HM].

Nuestro propósito presente es establecer el método de degeneración en el contexto de las foliaciones singulares en variedades algebraicas. Más precisamente, sea  $X$  una variedad algebraica (completa no-singular) y sea  $F$  una foliación singular en  $X$ . Supongamos dada una familia a un parámetro  $(X_t, F_t)$  de variedades con foliación singular conteniendo  $(X, F)$ , con fibra especial  $X_0$  una variedad con cruzamientos normales, de tipo compacto. Nos proponemos definir y estudiar el límite de  $F_t$  en  $X_0$  como una colección de foliaciones en las componentes irreducibles de  $X_0$ , satisfaciendo condiciones de compatibilidad apropiadas.

Este método resulta de utilidad para demostrar cierto tipo de afirmaciones, como por ejemplo la siguiente:

Si  $F$  es una componente irreducible del espacio de foliaciones algebraicas singulares de codimensión uno en un espacio proyectivo complejo, entonces para  $\omega \in F$  un punto genérico, el conjunto singular de  $\omega$  sólo tiene componentes irreducibles de dimensión cero o de codimensión dos.

[CLN] D. Cerveau and A. Lins Neto; Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in  $\mathbb{C}P(n)$ ,  $n \geq 3$ , *Annals of Mathematics* 143, 577-612, (1996).

[C] F. Cukierman; Families of Weierstrass points, *Duke Mathematical Journal* 58, 317-346, (1989).

[CF] F. Cukierman and L. Fong; On higher Weierstrass points, *Duke Mathematical Journal* 62, 179-203, (1991).

[EH,1] D. Eisenbud and J. Harris; Limit linear series: basic theory, *Inventiones Mathematicae* 85, (1986).

[EH,2] D. Eisenbud and J. Harris; The monodromy of Weierstrass points, *Inventiones Mathematicae* 90, (1987).

[GH] P. Griffiths and J. Harris; On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension-two cycles, *Math. Ann.* 271, 31-51 (1985).

[HM] J. Harris and I. Morrison; *Moduli of curves*, Springer-Verlag